ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

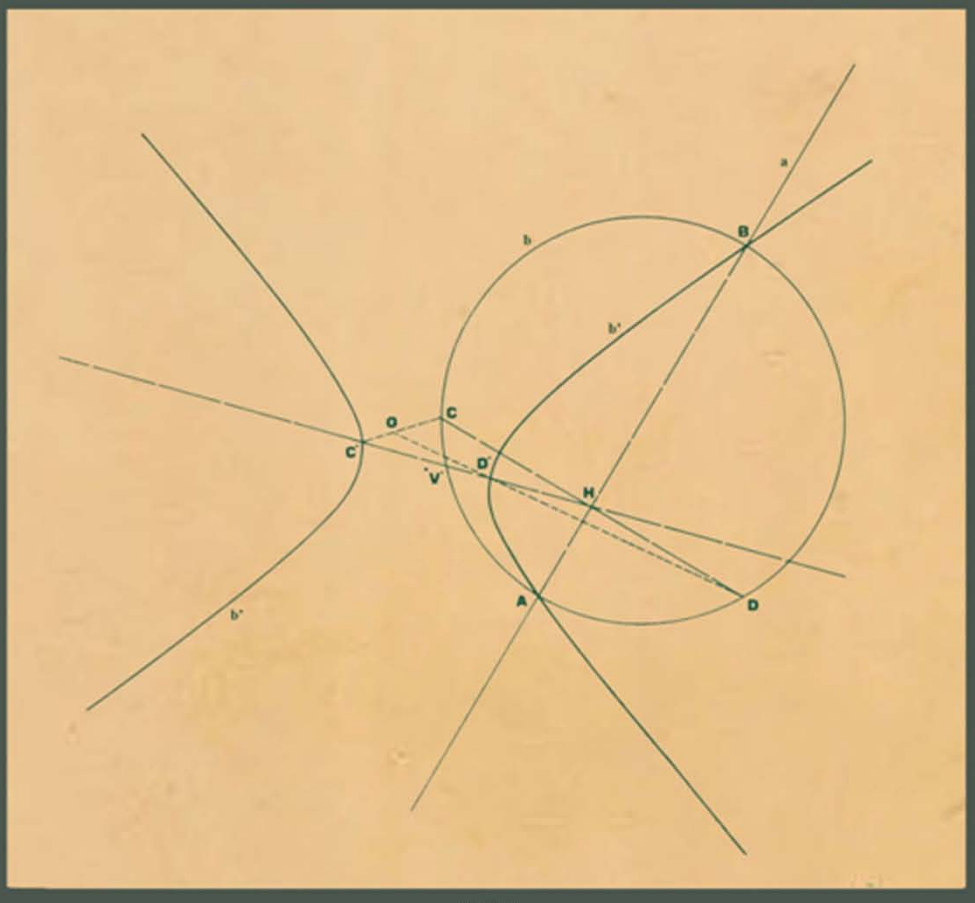
INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

Palermo, Italia

Università degli Studi di Palermo

Giuseppe Maria Catalano

INEDITI SULLE CONICHE



1988

Presentazione

La raccolta di contributi originali, qui esitati, costituisce certamente più che una sommatoria aritmetica, in quanto struttura l'immagine di un perseverante impegno alla ricerca di un linguaggio e di una scienza rinnovata: il linguaggio della comunicazione grafica, la scienza della rappresentazione geometrica. L'ing. Catalano, di cui confermo l'ottimale livello di competenza e di preparazione, ha scelto con sottile provocazione il titolo di "Inediti". Ad essi attribuisce notevole valenza nel ricondurre gli studiosi verso un processo di revisione di quella ricorrente chiusura aprioristica sulle potenzialità speculative della geometria nella rappresentazione. Dell'ing. Catalano sottolineo ancora la coerenza di una personalità versatile, fertile anche nell'ambito che mi è più caro: infatti, si rivela valido sostegno per la promozione, a Palermo, di una Scuola della geometria descrittiva, sulla cui validiità culturale e storica ambisco richiamare consensi allargati e ravvivati.

Michele Inzerillo

Introduzione

Disegnando è frequente imbattersi in configurazioni più o meno complesse nelle quali sia richiesto il tracciamento di coniche, pur essendo in possesso di pochi dati come punti, corde o tangenti o elementi non coniugati, forniti magari da precedenti operazioni grafiche.

Nel corso degli ultimi quattro anni i vari problemi presentatisi in tali occasioni, sono stati via via affrontati e risolti, riuscendo a fornire, talvolta, più soluzioni.

La grande utilità di queste dieci costruzioni è stata più volte riscontrata nelle applicazioni della geometria descrittiva, sia per la semplificazione di procedimenti antichi, che per l'ideazione di metodi nuovi, ed ha cosi sollecitato la raccolta di tali studi in un volume che ne permettesse la rapida divulgazione e la comoda consultazione.

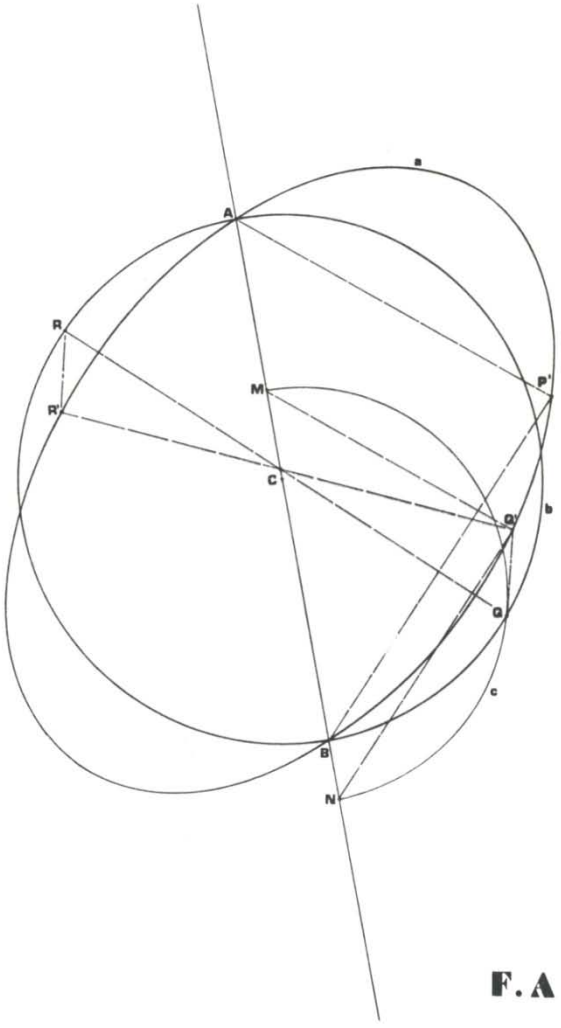
Costruzione **A**

COSTRUZIONE A (Fig. A)

Costruzione omologica dell'ellisse noti un diametro e due punti.

Siano noti dell'ellisse a un diametro AB e due punti P' e Q'.
Si instauri un'omologia affine tra la conica a e la circonferenza b avente per diametro AB: Passe omologico è fornito, ovviamente, dalla retta per A e B, punti uniti, ma occorre individuare il centro improprio.
Si osservi, a tal fine, come le direzioni P'A e P'B siano coniugate tra loro essendo A e B estremi di un diametro della conica a.

Mandiamo allora per Q' le rette aventi le direzioni citate, le quali intersecano l'asse di omologia nei punti M ed N e costruiamo l'arco della circonferenza c avente per diametro MN.
Il punto Q, omologo del punto Q', dovendo appartenere sia alla circonferenza b che all'arco c, non può che trovarsi nel punto intersezione di essi.
Nota la coppia omologa Q e Q', è noto il centro improprio nella direzione della retta che li contiene e l'omologia è del tutto definita.
Al generico punto R della circonferenza b corrisponde dunque il punto R' dell'ellisse, che risulta così immediatamente costruibile.



F. A

Costruzione B

COSTRUZIONE B (Fig. B)

Costruzione omologica dell'ellisse noti un diametro ed una corda non coniugata ad esso.

Siano noti un diametro AB ed una corda D'E' non coniugata ad esso appartenenti all'ellisse a da tracciare.

Si instauri un'omologia affine tra la conica a e la circonferenza b avente per diametro AB; omologia di cui è noto l'asse AB, ma non il centro improprio.

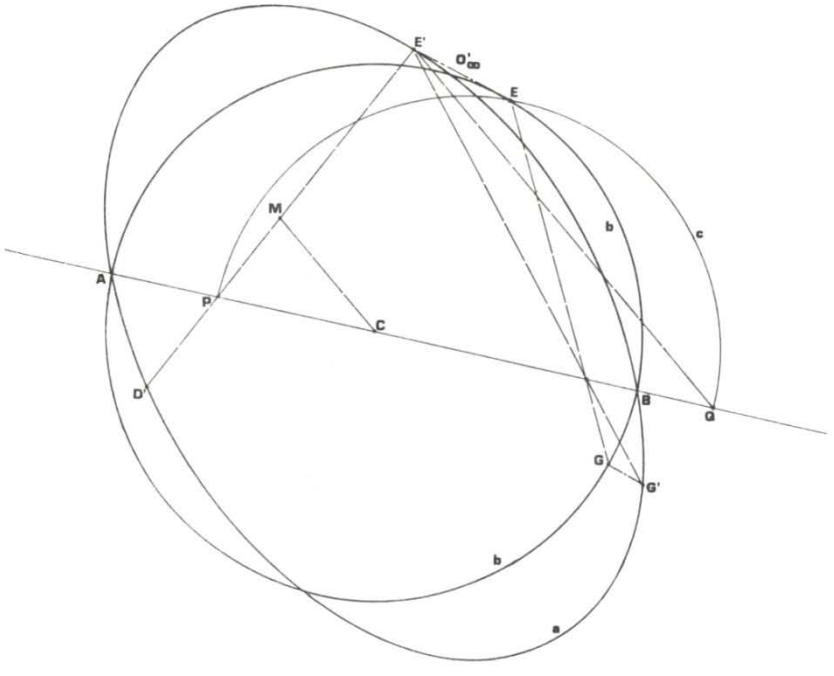
Si consideri dunque il punto M, medio della corda D'E' che interseca l'asse nel punto P: la direzione MC è coniugata alla direzione D'E', essendo la corda D'E' bisecata dalla retta MC.

Mandiamo allora per E' la retta parallela alla MC, retta che interseca l'asse di omologia nel punto Q; si costruisca quindi l'arco di circonferenza c, avente per diametro PQ.

Il punto E, omologo del punto E', deve appartenere non solo alla circonferenza b, ma anche all'arco c: E coincide, cioè, con il punto intersezione di essi.

E' individuato cosi nella direzione E-E' il centro improprio O che individua l'affinità omologica.

Ancora una volta la corrispondenza affine instaurata fra la circonferenza b e l'ellisse a, permette di ricavare per il generico punto G della prima, l'omologo G' della seconda, definendo del tutto quest'ultima.



F. B

Costruzione C

COSTRUZIONE C (Figure C_a, C_b, C_c)

Costruzione della conica quando ne siano noti il centro, due punti e la retta tangente in uno di essi.

Noti il centro C', due punti A' e B', che non siano estremi dello stesso diametro, della generica conica, nonché la retta c' tangente essa, ad esempio, in B', si assuma come asse di omologia la retta a contenente A' e B'.

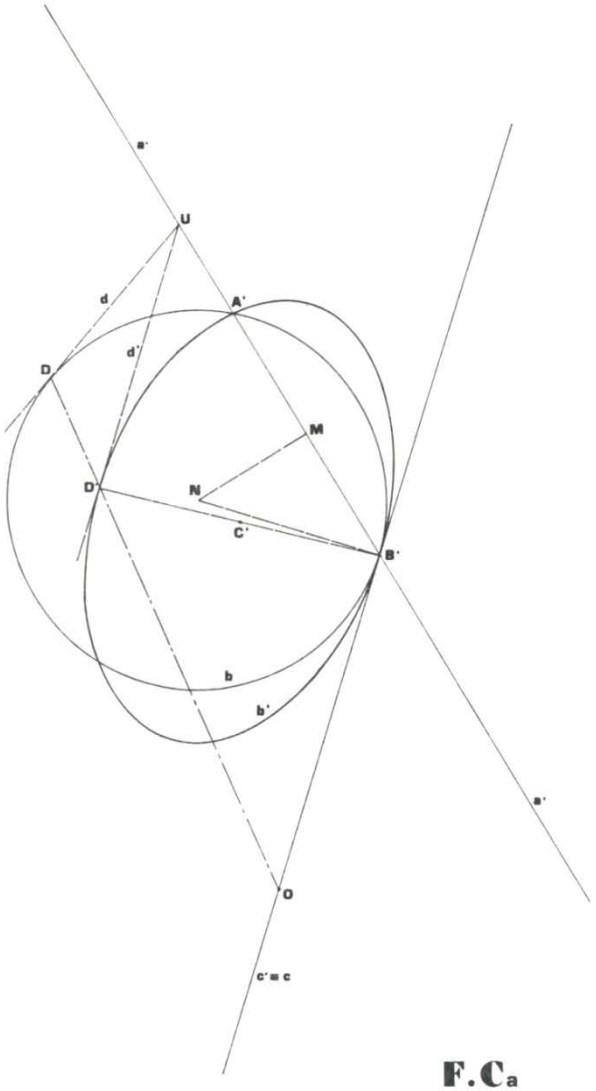
Le perpendicolari condotte per B' alla retta c e per il punto M, medio di A'B', all'asse a, forniscono per intersezione il centro N della circonferenza b omologa, contenente pertanto A',B' e tangente la retta c'.

La retta c' essendo tangente le due curve omologhe b e b' ha l'omologa c coincidente con se stessa, dacché si deduce che essa deve contenere pure il centro d'omologia.

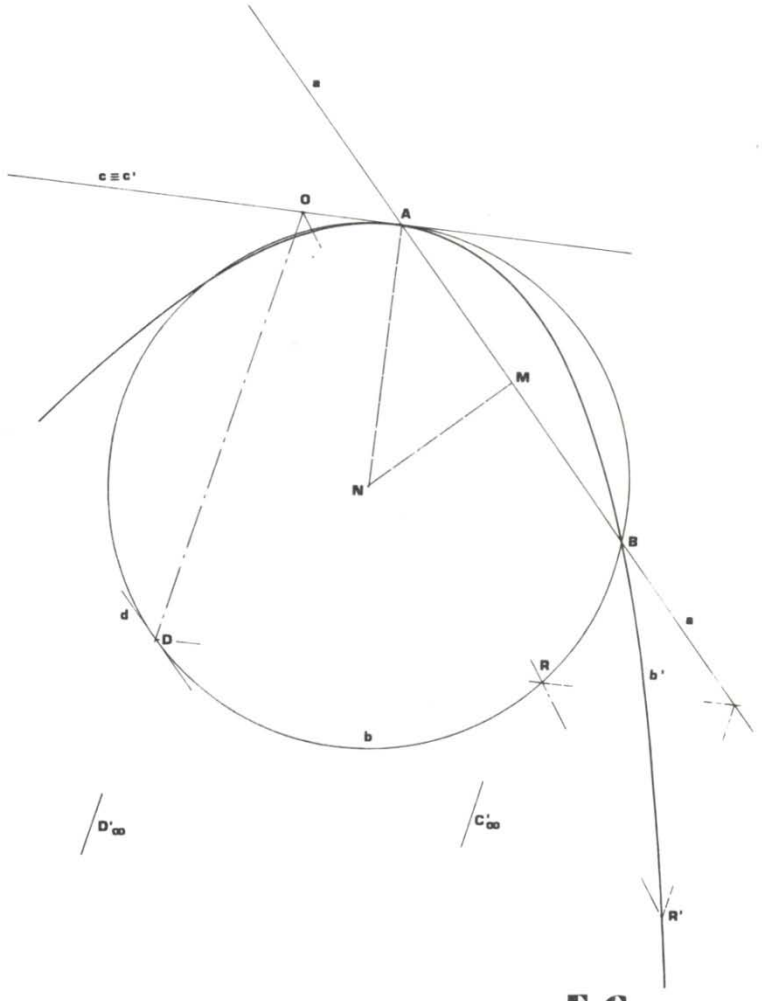
Tracciato allora D' estremo del diametro contenente B' e la corrispondente tangente d' parallela alla c', basterà individuare il punto D in cui la d, omologa della d', tange la b: la retta contenente la coppia omologa DD' interseca dunque la c' nel centro d'omologia O cercato.

Se C' e improprio, essendo D' all'infinito nella direzione del centro, la retta DD' è parallela a quest'ultimo: D coincide con uno dei punti in cui la d parallela ad a (essendo U all'infinito) tange la circonferenza b.

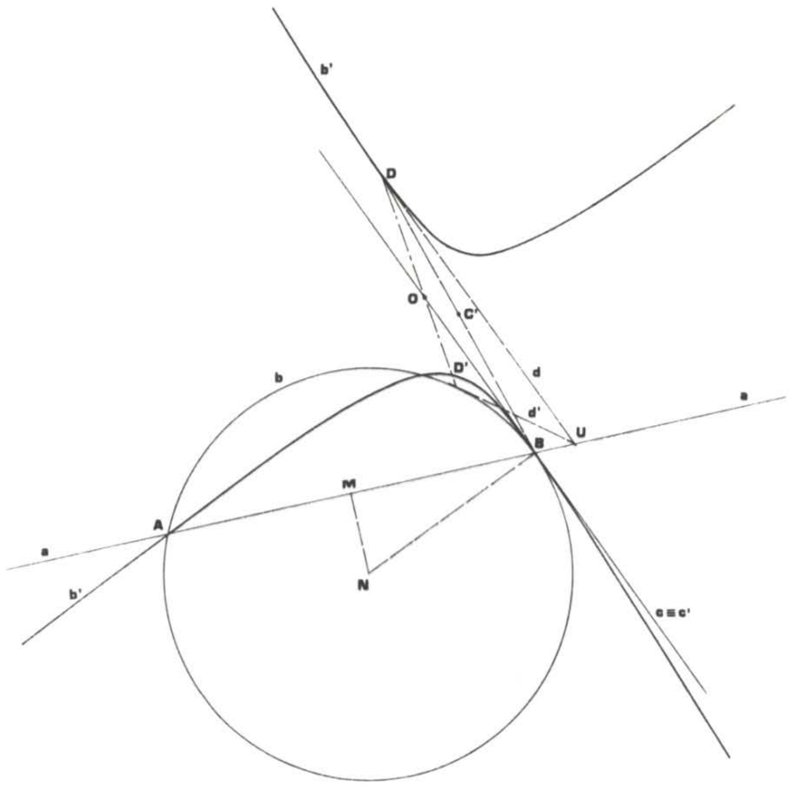
Nel caso in cui si abbia un'iperbole è bene far riflettere sulla necessità che i due punti noti appartengano ad uno stesso ramo della conica, non essendo possibile, come si sa, costruire la circonferenza omologa su corde indefinite dell'iperbole.



F.Ca



F.Cb



F.Cc

Costruzione **D**

COSTRUZIONE D (Figure Da, Db, Dc)

Costruzione della conica quando ne siano noti il centro (proprio o improprio), due punti e la retta tangente in uno di essi.

Dati il centro C_o, i punti A' e D', che non siano estremi dello stesso diametro, della generica conica nonché la retta t tangente essa in D', si tracci il punto C' simmetrico di D' rispetto al centro, definendo, in tal modo, il diametro C'D' della conica.

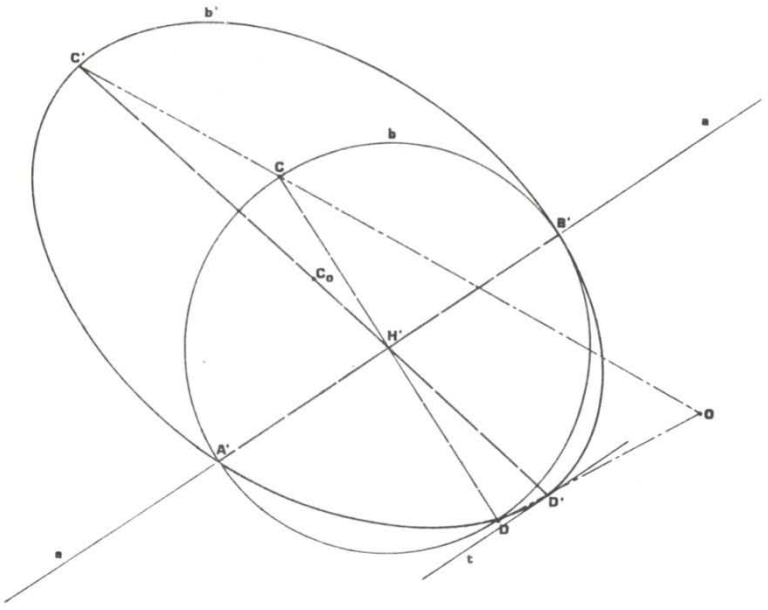
Se C_o è improprio il punto C' va all'infinito e il diametro resta determinato dalla semiretta avente estremo in D' e direzione C_o.

In ogni caso il punto B' simmetrico di A' rispetto al diametro nella direzione di t definisce la corda A'B', coniugata a C'D' rispetto alla conica (A'B' è infatti parallela alla tangente in D'), sicché è possibile instaurare omologia fra la conica e la circonferenza b avente per diametro la corda A'B'.

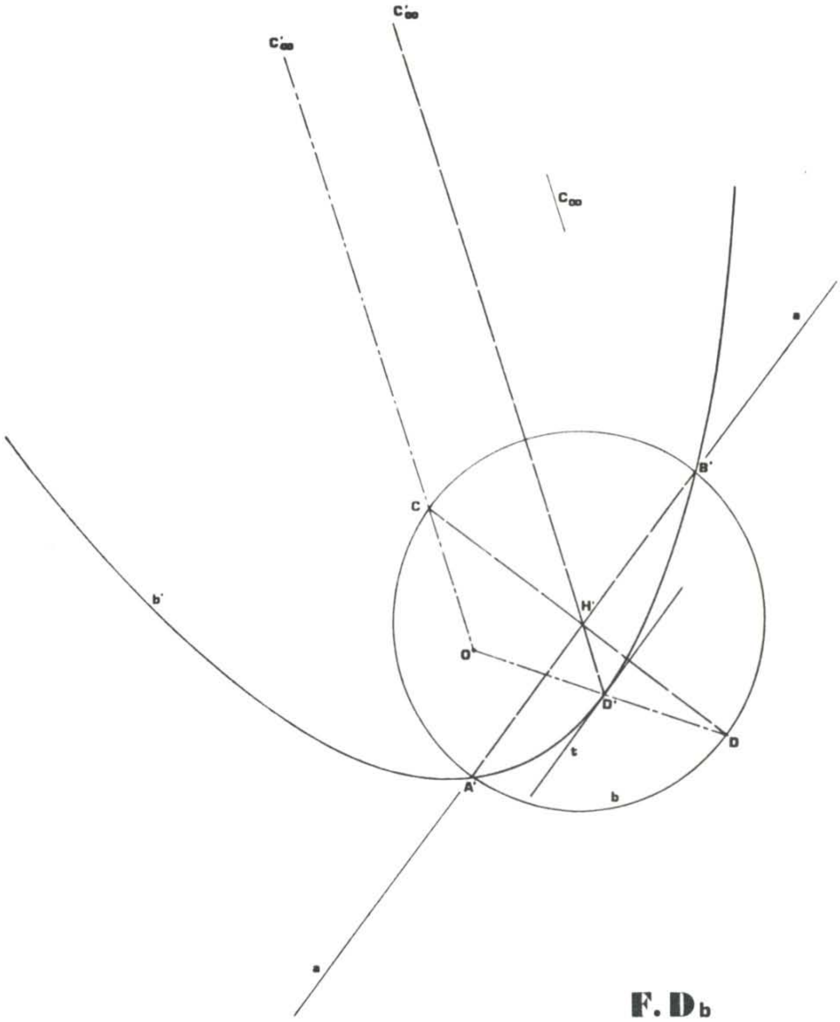
La retta contenente A'B' assume, in tal modo, il ruolo di asse a di omologia ed il diametro CD della b ortogonale al detto asse diviene omologo di C'D', essendo CD coniugato ad A'B' rispetto alla b, sicché è immediato individuare il centro proprio O dell'omologia nel punto intersezione delle congiungenti le coppie omologhe CC' e DD'.

Tale omologia ha dunque asse e centro al finito (come era da attendersi vista la asimmetria della configurazione rispetto all'asse a).

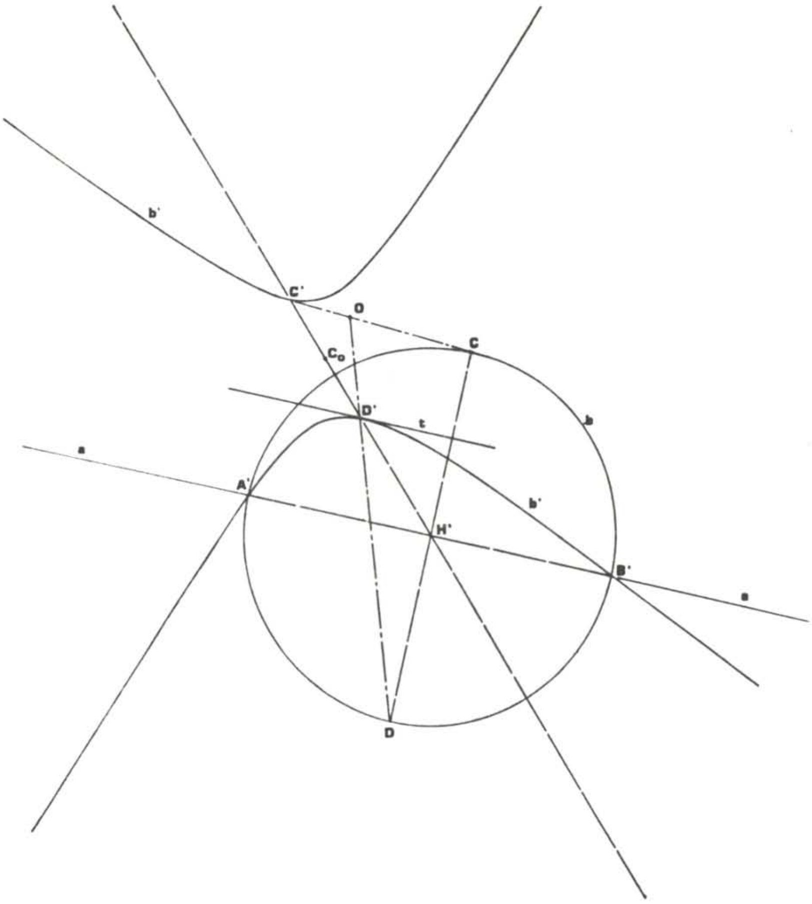
Come si evidenzia nelle tavole seguenti (Da,Db,Dc), essa può instaurarsi con gli elementi suddetti di una qualsiasi conica propria (ellisse, parabola, iperbole).



F. D_a



F. Db



F. D_c

Costruzione E

COSTRUZIONE E (Figure Ea,Eb,Ec)

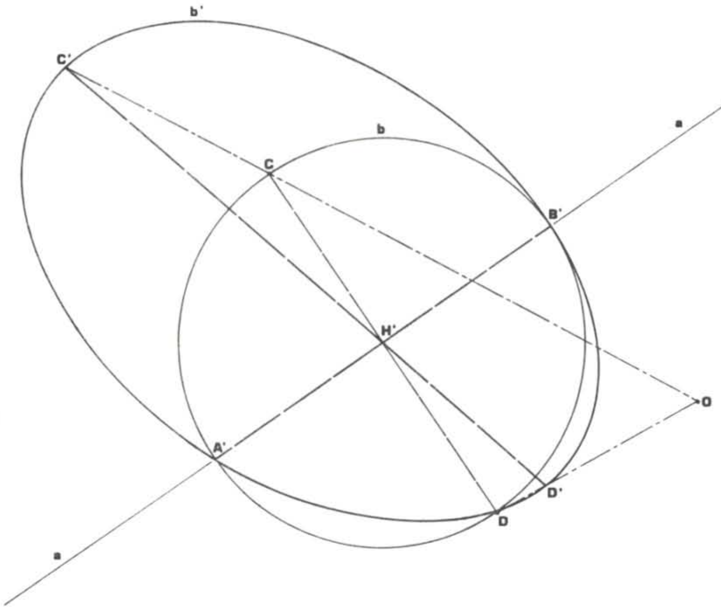
Costruzione della conica quando ne siano noti un diametro ed una corda coniugata ad esso.

Dati un diametro C'D' ed una corda A'B' ad esso coniugata della generica conica b', si costruisca la circonferenza b omologa della b', avente per diametro la corda stessa.

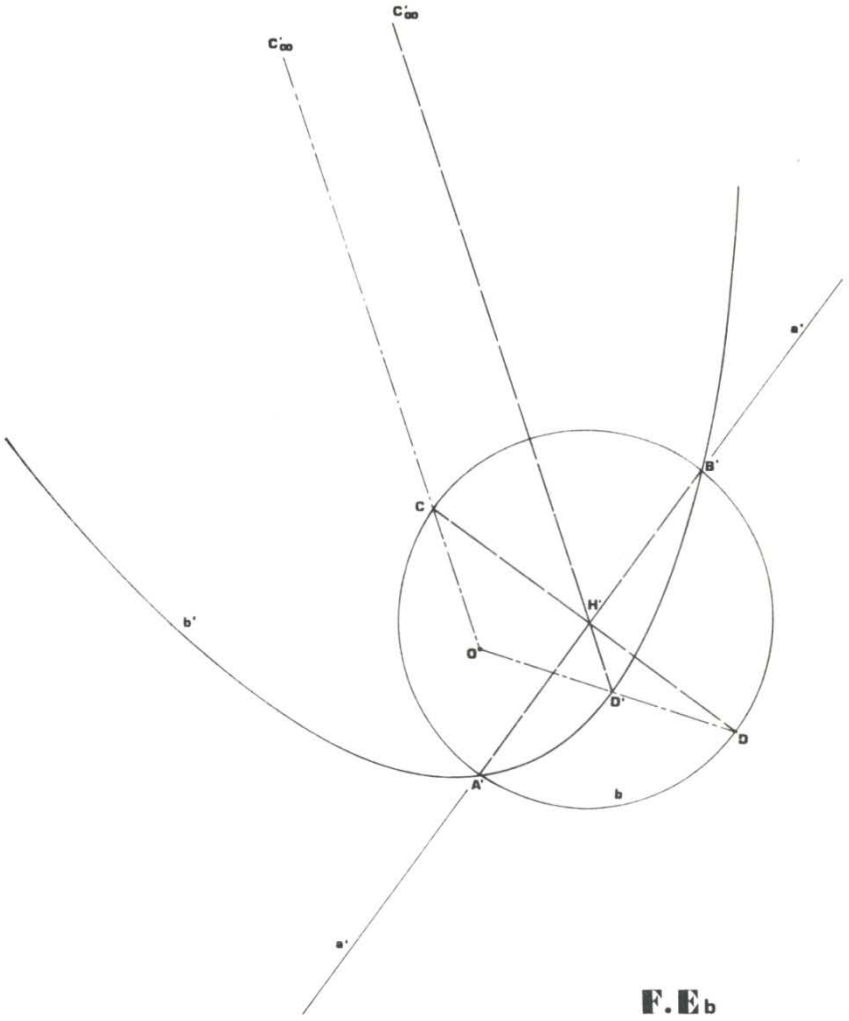
La retta contenente A'B' assume, in tal modo, il ruolo di asse a d'omologia ed il diametro CD della b, ortogonale al detto asse, diviene omologo di C'D', essendo CD coniugato ad A'B' rispetto alla b, sicché è immediato individuare il centro proprio O dell'omologia nel punto intersezione delle congiungenti le coppie omologhe CC' e DD'.

Tale omologia ha dunque asse e centro al finito (come era da attendersi vista la asimmetria della configurazione rispetto all'asse a).

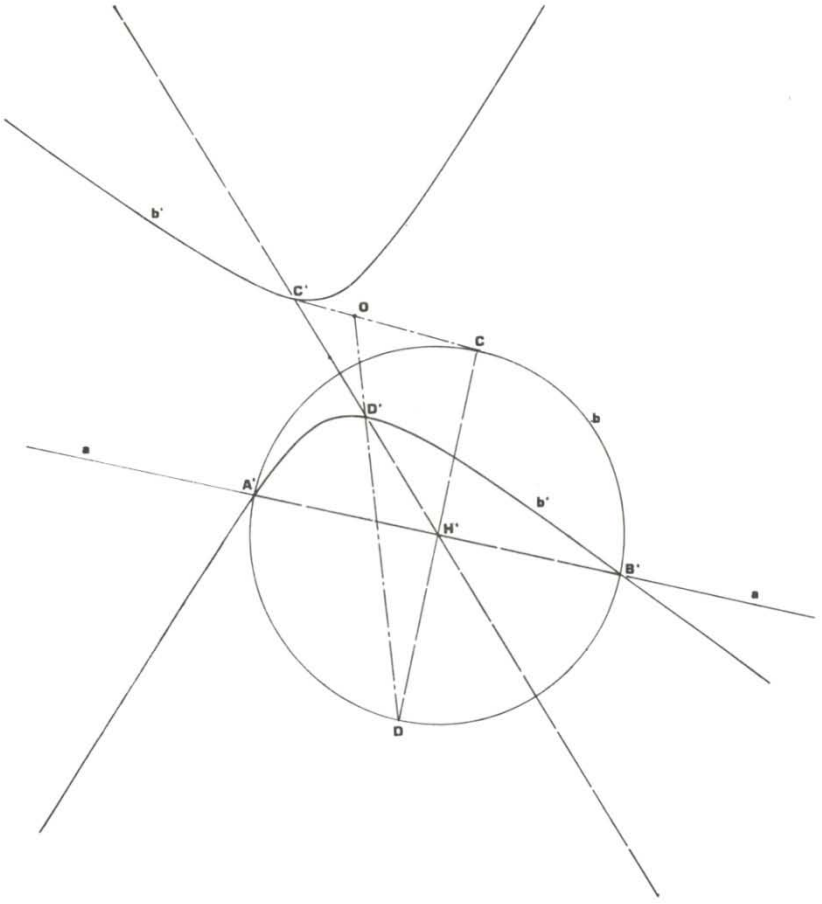
Come si evidenzia nelle tavole, seguenti (Ea, Eb, Ec) essa può instaurarsi con gli elementi suddetti di una qualsiasi conica (ellisse, parabola, iperbole).



F.Ea



F. E b



F. Ec

Costruzione F

COSTRUZIONE F (Figure Fa, Fb, Fc)

Costruzione della conica quando ne siano noti un'asse e una corda ad esso coniugata.

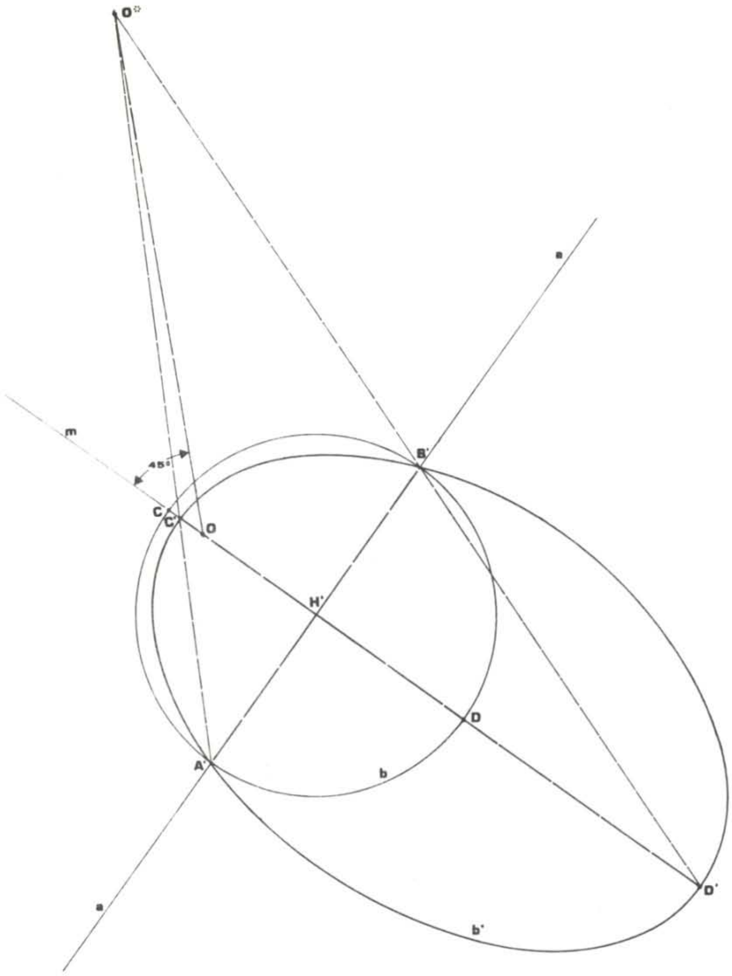
Noti l'asse C'D' ed una corda A'B' ad esso coniugata della generica conica b', si costruisca la circonferenza b, omologa della b', avente per diametro la corda stessa.

La retta, contenente A'B' assume, pertanto, il ruolo di asse a dell'omologia ed il diametro CD della b, ortogonale al detto asse, diviene omologo di C'D', essendo CD coniugato ad A'B' rispetto alla b.

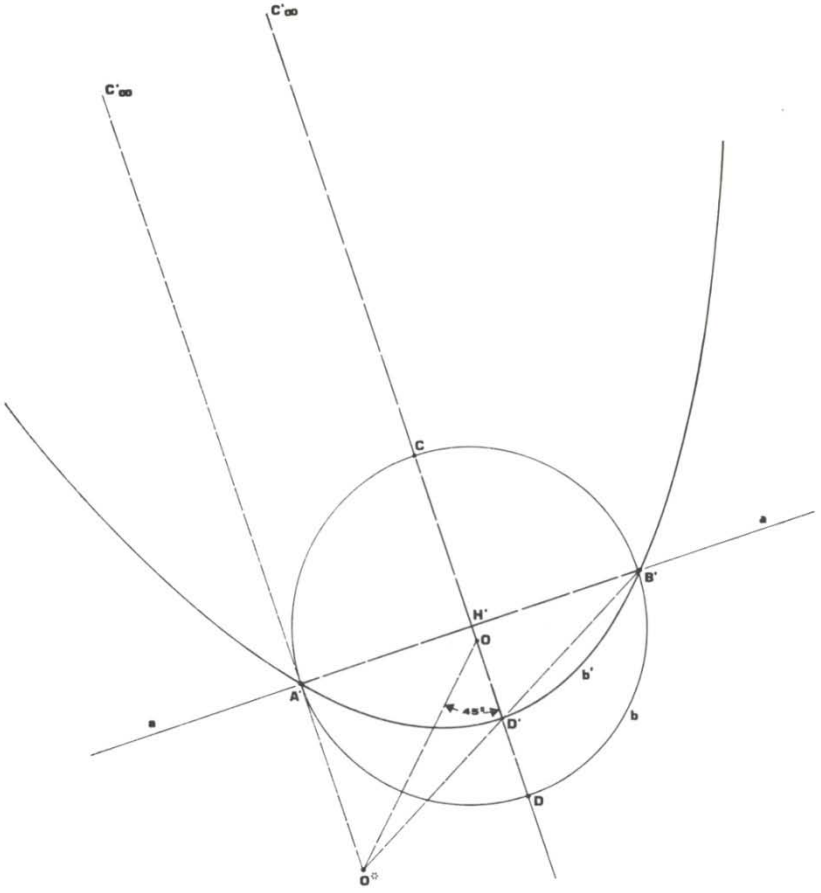
Appartenendo però CD e C'D' alla stessa retta m, occorre individuare il centro proprio O dell'omologia, che giace sulla m, ricorrendo al ribaltamento sul piano dell'omologia σ del piano contenente CD e ortogonale a σ : immaginiamo infatti che l'omologia nasca dalla proiezione della prospettività fra la circonferenza di diametro A'B' disposta sul piano contenente l'asse a e ortogonale a σ , e la conica b' giacente su quest'ultimo, secondo un centro di proiezione improprio a 45°.

Basterà allora condurre la A'C' e la B'D' per trovare nell'intersezione di esse il centro O* della prospettività ribaltato , che proiettato sulla m secondo il centro di proiezione suddetto ribaltato, fornirà il centro d'omologia O cercato.

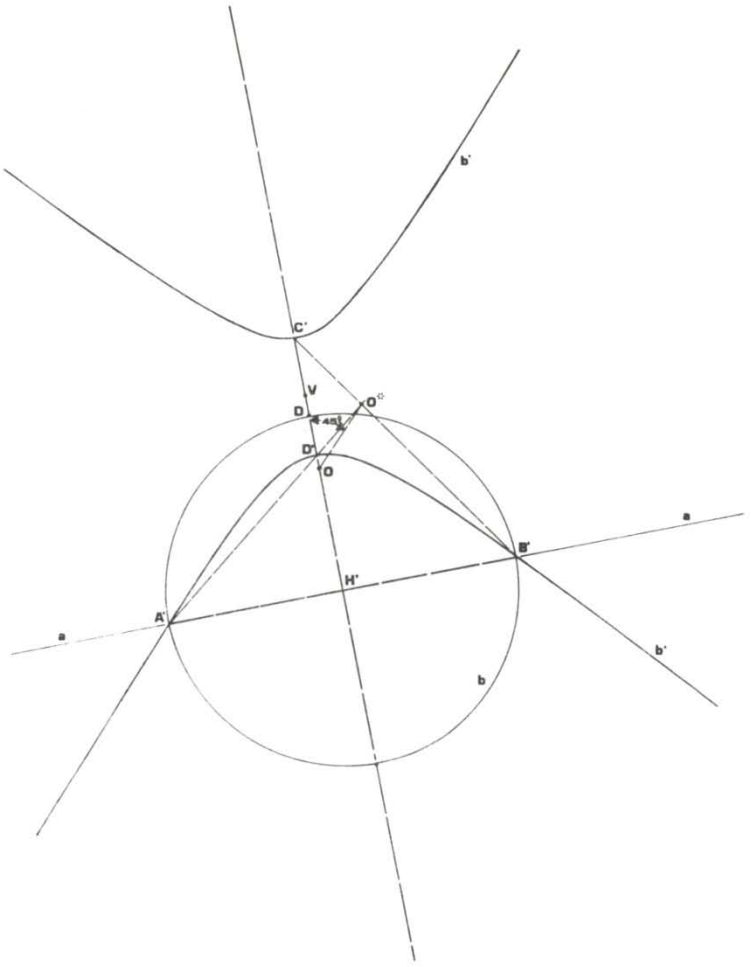
Nelle figure seguenti si mostrano i casi possibili (ellisse, parabola, iperbole).



F.Fa



F.Fb



F.Fc

Costruzione G

COSTRUZIONE G (Figure Ga, Gb, Gc, Gd).

Costruzione della conica quando ne siano note due corde conjugate.

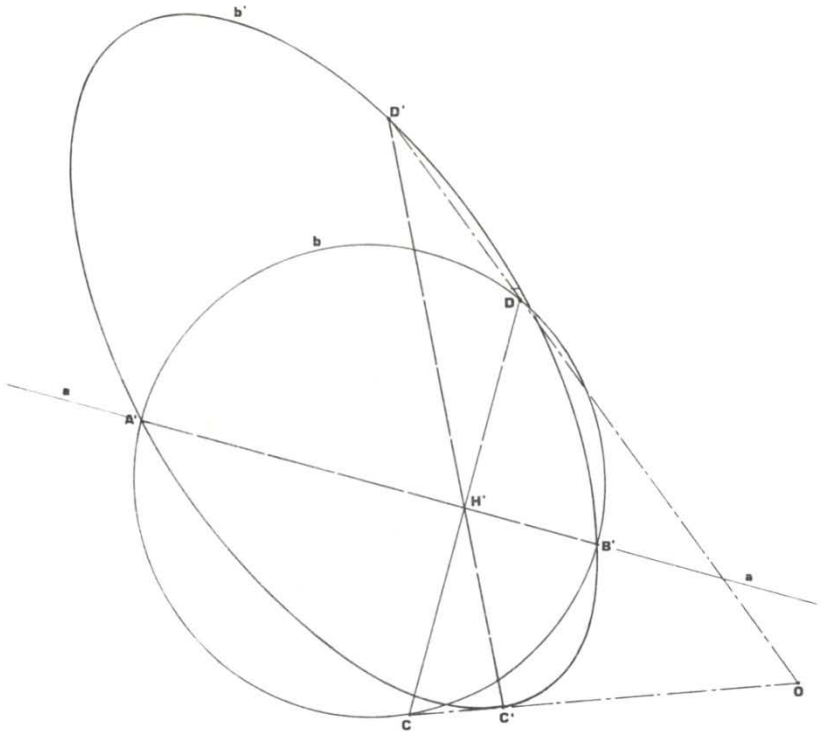
Caso A (Figure Ga, Gb, Gc)

Note due corde A'B' e C'D' della generica conica b', coniugate fra loro, si costruisca la circonferenza b omologa della b', avente per diametro una qualsiasi delle due corde, per esempio la A'B'.

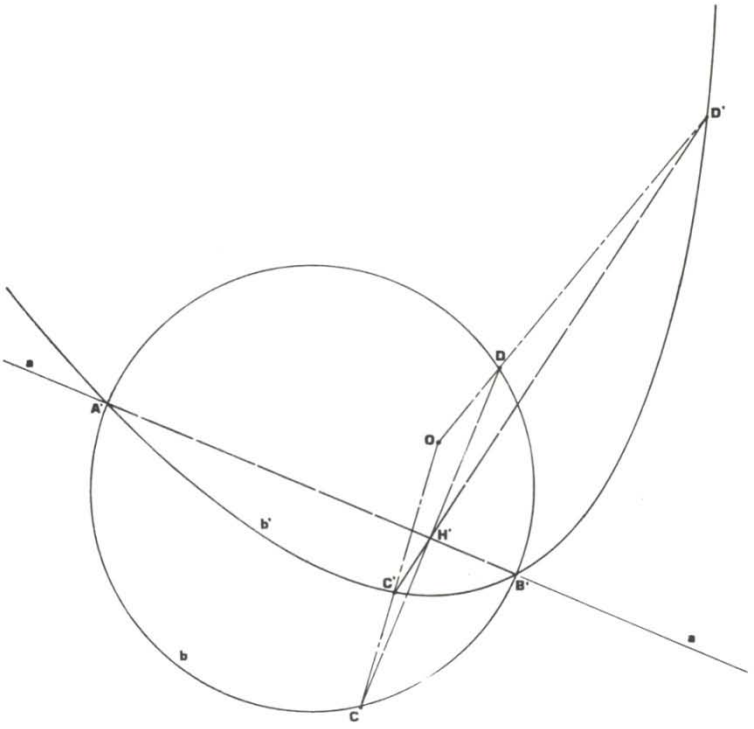
La retta contenente A'B' assume, pertanto, il ruolo di asse a dell'omologia e la corda CD della b, ortogonale al detto asse e contenente H', punto intersezione delle corde della conica, essendo coniugata al diametro A'B' rispetto alla b, diviene omologa della C'D', sicché è immediato individuare il centro proprio 0 dell'omologia nel punto intersezione delle congiungenti le coppie omologhe CC' e DD'.

Tale omologia ha dunque asse e centro al finito (come era da attendersi vista la asimmetria della configurazione rispetto all'asse a).

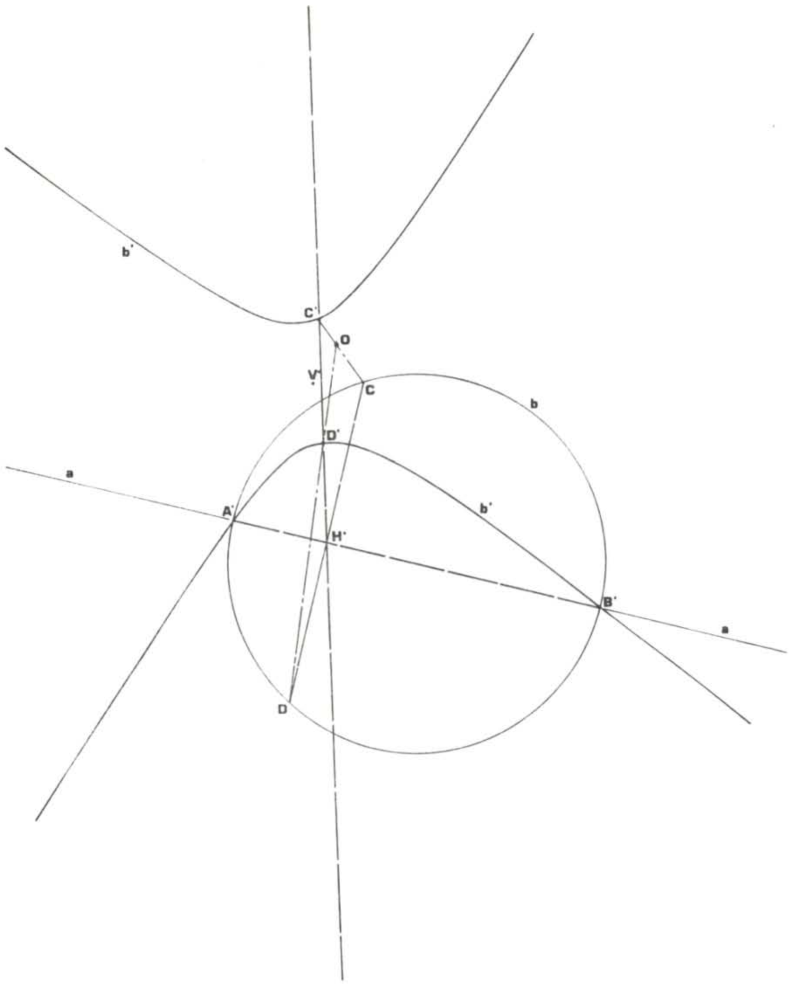
Nelle tavole seguenti (Ga, Gb, Gc) si sottolinea la generalità della costruzione eseguibile,come si è detto, per tutte le coniche (ellisse, parabola, iperbole).



F.Ga



F. G♭

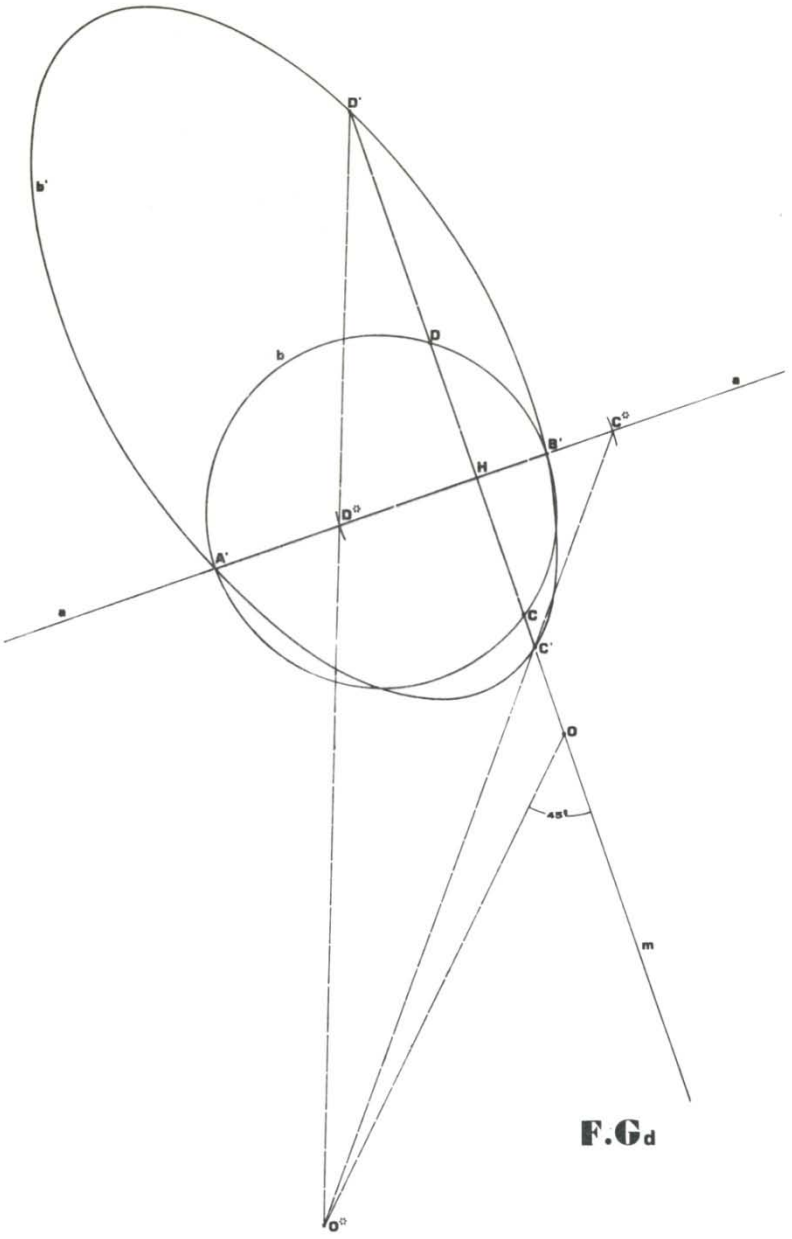


F.Gc

Caso b (Fig. Gd)

Se le corde CD e C'D' appartengono alla stessa retta m, occorre individuare il centro proprio O dell'omologia, che giace, ovviamente, sulla m, ricorrendo al ribaltamento sul piano dell'omologia σ del piano contenente CD e ortogonale a σ : immaginiamo, infatti, che l'omologia nasca dalla proiezione della prospettività fra la circonferenza di diametro A'B', disposta sul piano contenente l'asse a e ortogonale a σ , e la conica b' giacente su quest'ultimo, secondo un centro di proiezione improprio a 45°.

Basta allora ruotare la corda CD intorno ad H' portandola in C*D*, per ottenere il ribaltamento della corda prospettica della C'D', di modo che, conducendo la D'D* e la C'C*, si possa trovare nell'intersezione di esse il centro O* della prospettività ribaltato che, proiettato sulla m secondo il centro di proiezione suddetto ribaltato, fornisce il centro d'omologia O cercato.



F.Gd

Costruzione H

COSTRUZIONE H (Figure H_a, H_b, H_c)

Costruzione della conica, quando ne siano noti tre punti e le corrispondenti rette tangenti in due di essi.

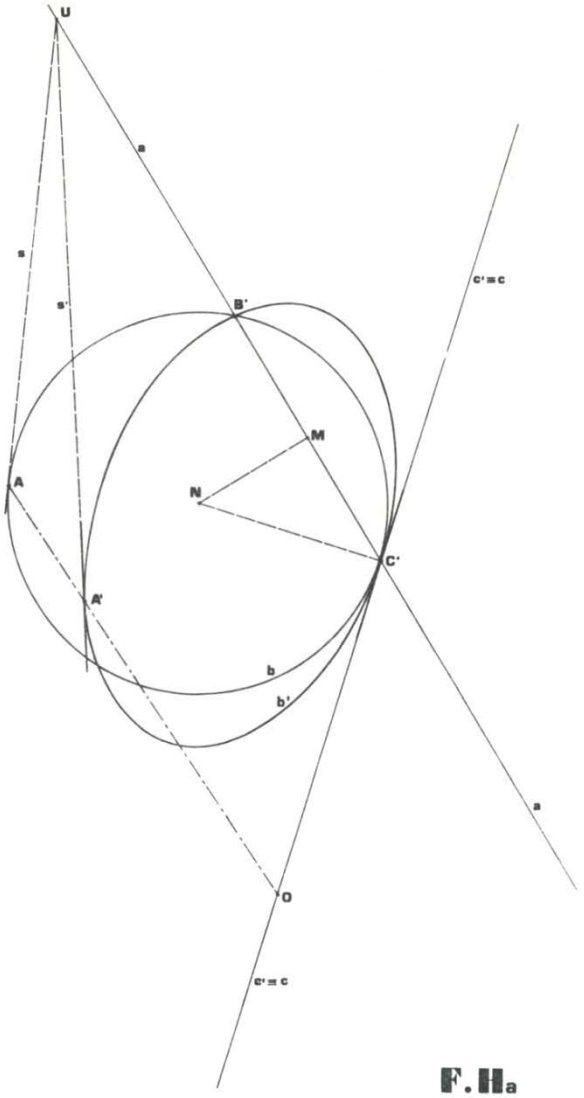
Noti i punti A', B' e C' della conica b', nonché le rette s' e c' tangenti essa rispettivamente nei punti A' e C' ,si assuma come asse di omologia la retta a contenente il punto B' ed uno qualsiasi degli altri due, ad esempio C'.

Le perpendicolari condotte per C' alla retta c e per it punto M, medio di B'C', all'asse a, forniscono per intersezione il centro N della circonferenza b omologa, contenente pertanto B', C' e tangente la retta c'.

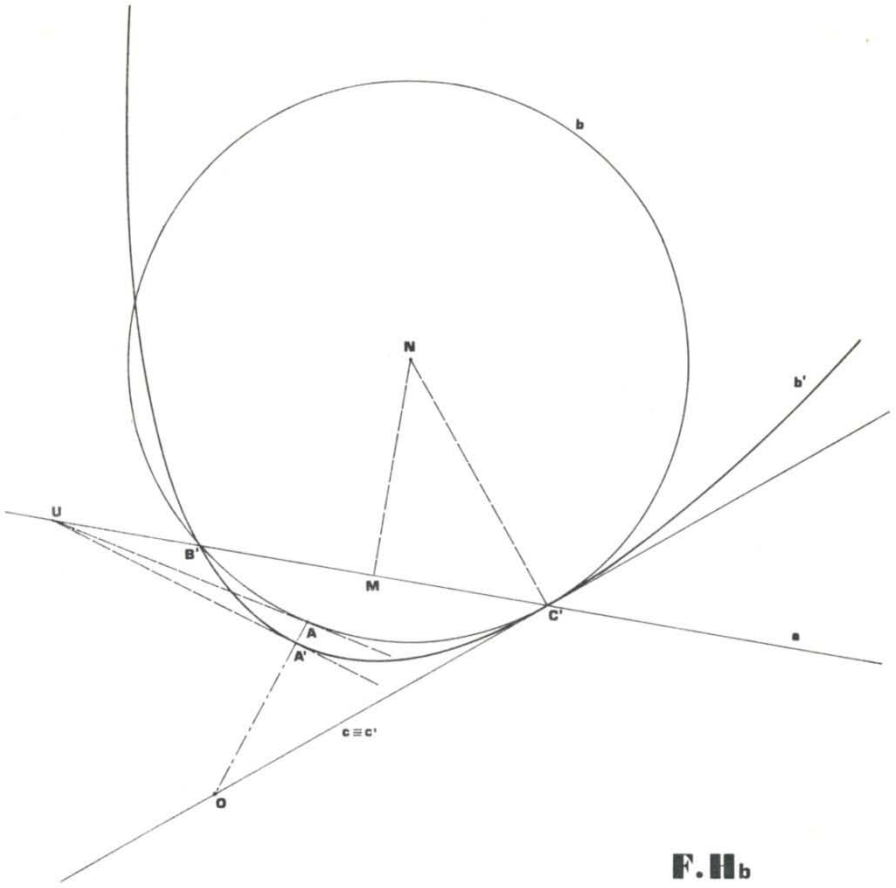
La retta c', essendo tangente le due curve omologhe b e b', ha l'omologa c coincidente con se stessa, dacché si arguisce che essa deve contenere pure il centro d'omologia.

Basterà allora individuare il punto A in cui la s, omologa della s', tange la b: la retta contenente la coppia omologa AA' interseca dunque la c' nel centro d'omologia O cercato.

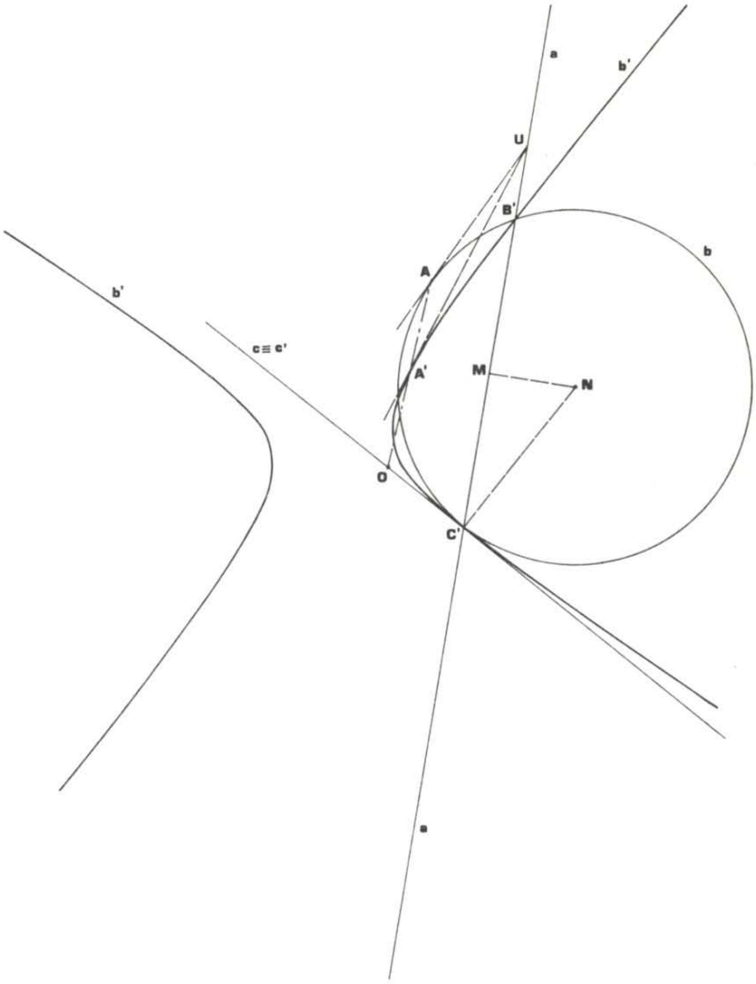
La costruzione,come si è detto, può dar luogo ad un'ellisse, una parabola o una iperbole.



F. Ha



F. Hb



F.Hc

Costruzione I

COSTRUZIONE I (Fig.Ia,Ib)

Costruzione della parabola, quando ne siano noti due punti e le corrispondenti rette tangenti in essi la conica.

Caso A (Fig. Ia)

Noti i punti A' e B' della parabola b', nonché le rette c',d' tangenti in essi la conica, si assuma come asse di omologia la retta a contenente i punti A' e B'.

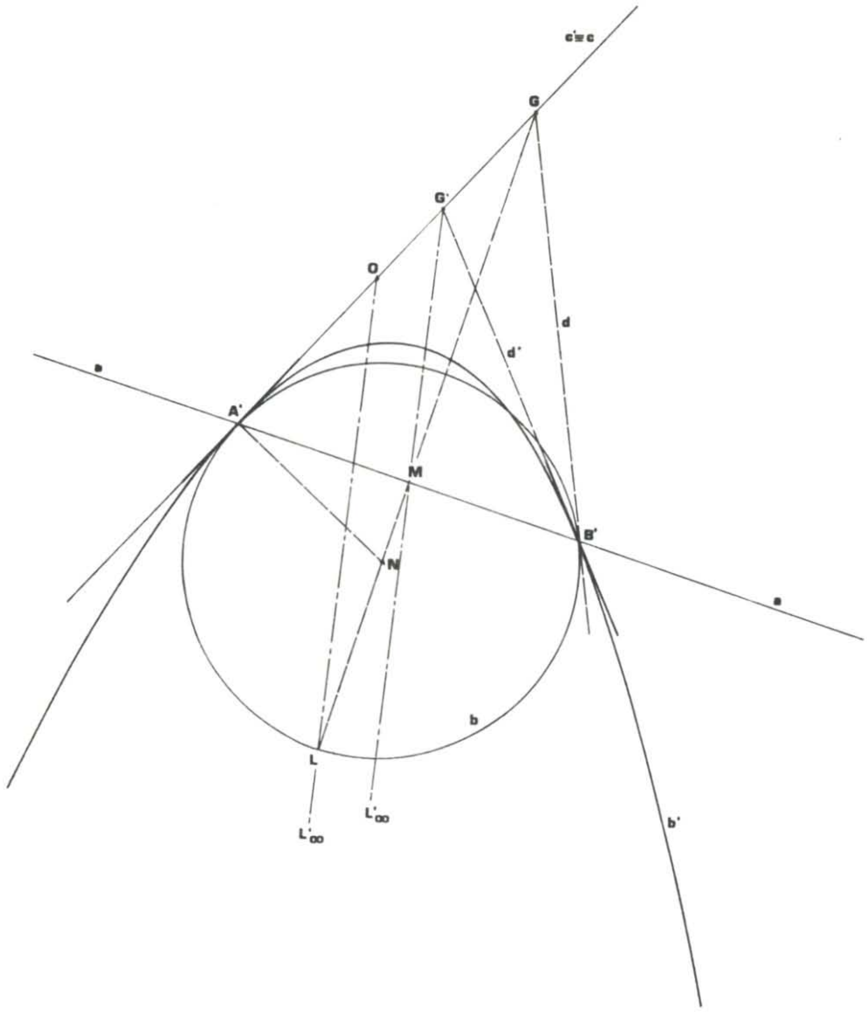
Le perpendicolari condotte rispettivamente per uno qualsiasi dei due punti, ad esempio A', alla corrispondente retta tangente c' e per il punto M, medio di A'B', all'asse a, forniscono per intersezione il centro N della circonferenza omologa b contenente pertanto A', B' e tangente la retta c'.

La retta c', essendo tangente le due curve omologhe b e b', ha l'omologa c coincidente con se stessa, dacché si deduce che essa deve contenere pure il centro d'omologia.

La d' e la omologa d, tangente b, intersecano la c fornendo la coppia di punti omologhi G, G'.

D'altra parte il punto L, in cui una delle parallele alla a tange la circonferenza, (o, se si vuole, il punto diametralmente opposto nella b) si può assumere come punto di tangenza della retta limite (retta parallela all'asse a, i cui punti hanno omologhi impropri), che deve necessariamente tangere la b, affinché la b' sia una parabola.

L'intersezione della parallela per L alla MG' con la c fornirà dunque il centro d'omologia cercato, dovendo, come si è detto, il punto L avere per omologo L'_{oo}, direzione dell'asse.



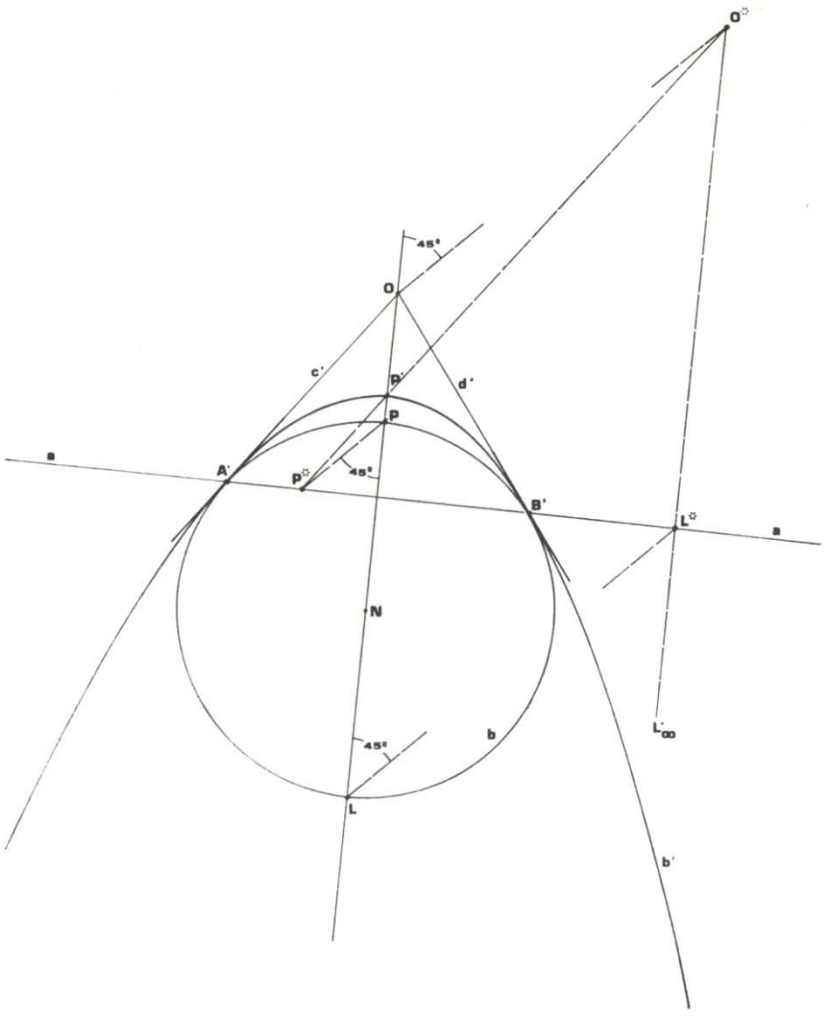
F. Ia

Caso B (Fig. Ib)

Se le rette c', d' tangenti la parabola in A' e B' risultano tangenti negli stessi punti la circonferenza omologa b, sono noti l'asse a e il centro O (nell'intersezione delle due tangenti), ma occorre individuare una coppia di punti omologhi come P e P'.

Si ricorre allora al ribaltamento sul piano dell'omologia σ del piano contenente il diametro PL della b ed ortogonale a σ : immaginiamo, infatti, che l'omologia nasca dalla proiezione della prospettività fra una circonferenza di corda A'B' disposta sul piano contenente l'asse a ed ortogonale a σ , e la conica b' giacente su quest'ultimo, secondo un centro di proiezione improprio a 45°.

Basta allora ribaltare il diametro PL in P*L*, condurre la parallela per L* alla PL (il prospettico di L* a all'infinito secondo la direzione dell'asse della conica) e la retta a 45° per O alla PL, per trovare nell'intersezione di esse il centro O di prospettività ribaltato: la O*P* interseca la PL nel punto P' omologo del punto P.



F. Ib

Costruzione L

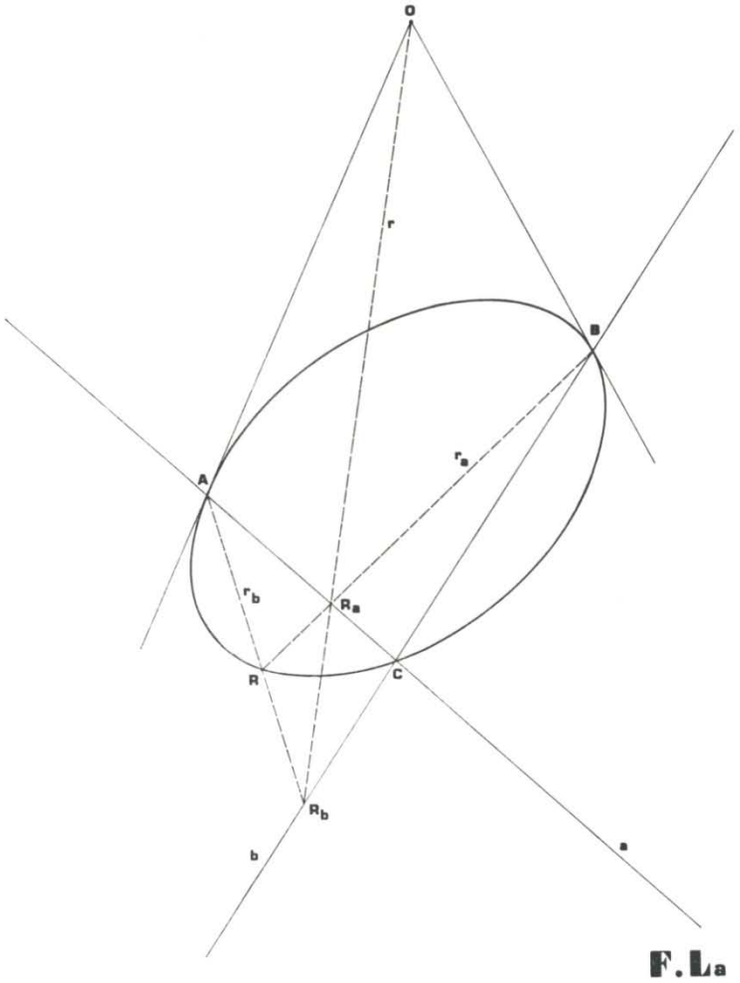
COSTRUZIONE L (Figure L_a, L_b, L_c)

Costruzione della conica, quando ne siano noti tre punti e le corrispondenti rette tangenti in due di essi.

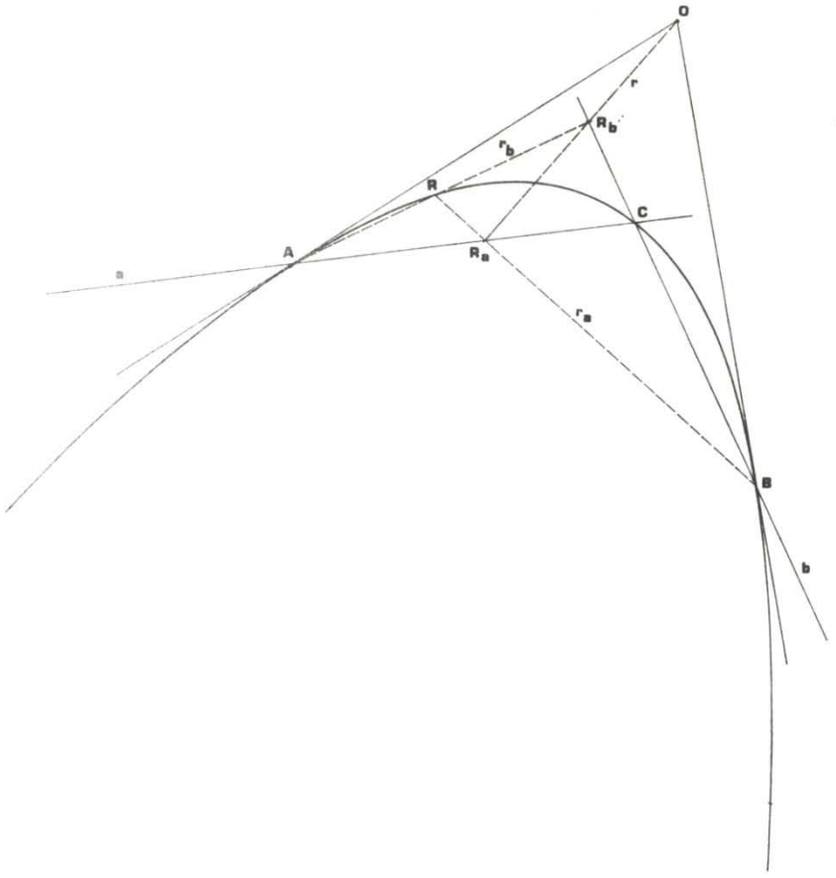
Noti della conica i punti A, B, C e le rette tangenti ad essa rispettivamente nei punti A e B, si assumano questi ultimi, come centri di due fasci proiettivi, le cui rette corrispondenti si intersechino in punti della conica (Teorema di Steiner e Chasles).

Il punto O intersezione delle due rette tangenti può assumersi come centro di un fascio prospettivo ai primi due, essendo assi di prospettività la retta a, contenente i punti A e C, e la retta b, contenente i punti B e C.

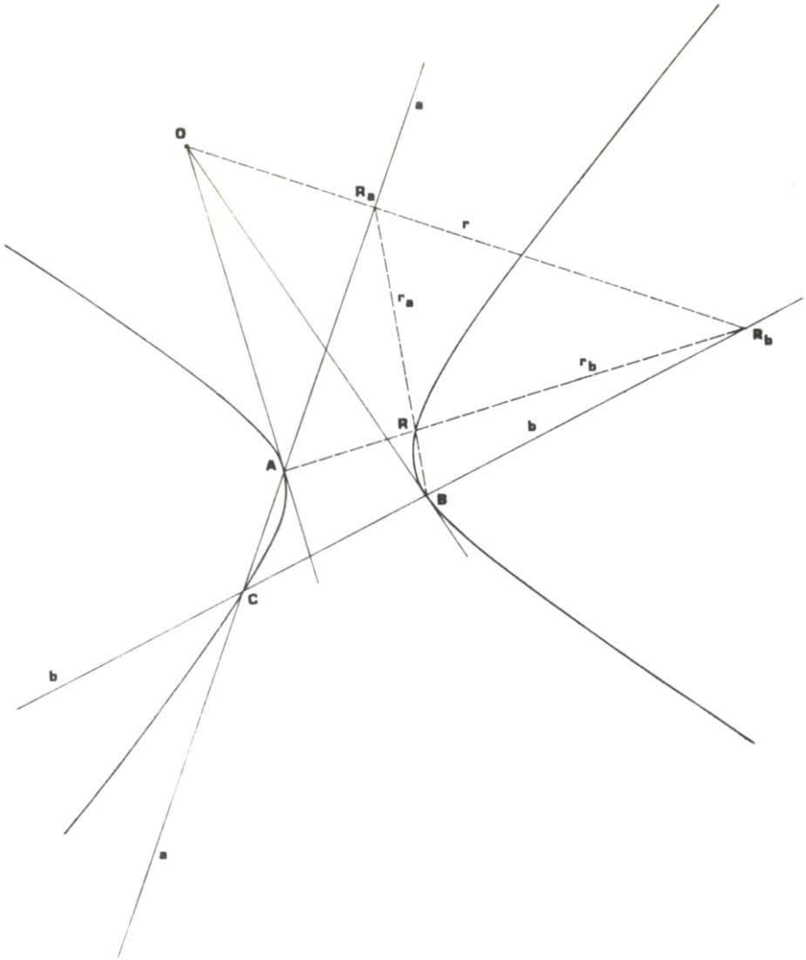
In tal modo il generico punto R della conica pusò trovarsi immediatamente come punto comune a due rette proiettive: la generica retta r per O taglia infatti, in R_a ed R_b gli assi di prospettività individuando le rette r_a ed r_b, proiettivamente corrispondenti, intersecantesi in R.



F. La



F. L_b



F. Lc

BIBLIOGRAFIA

FIEDLER, Darstellende Geometrie, Druck, Leipzig,

1875. **G.** FANO, Lezioni di Geometria Descrittiva, Paravia,

Torino, 1882. SEVERI, Geometria Descrittiva, La Litotipo

ed., Padova, 1919.

G. LORIA, Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai nostri giorni, U. Hoepli, Milano, 1921.

G. LORIA, Complementi di Geometria Descrittiva, U. Hoepli, Milano,

1924.

G. LORIA, Metodi di Geometria Descrittiva, U. Hoepli, Milano,

1925.

F. ENRIQUES, Lezioni di Geometria Descrittiva, Zanichelli,

Bologna, 1925.

M. ALBEGGIANI, Applicazioni della Geometria Descrittiva, Castiglia, Palermo, 1926.

0. CHISINI, Geometria Analitica e Proiettiva, GUFM, Milano, 1928.

M. DE FRANCHIS, Geometria analitica e proiettiva, Ciuni, Palermo,

1939. B. SEGRE, Geometria Analitico Descrittiva, Patron, Bologna,

1950.

L. CAMPEDELLI, Esercitazioni di geometria analitica e proiettiva CEDAM, Padova, 1951.

G. SELLER, Geometria Descrittiva, U. Hoepli, Milano, 1960.

L. CAMPEDELLI, Lezioni di Geometria, CEDAM, Padova, 1960.

R. FILOSTO, Assonometria per ribaltamento, Ed. Palma,

Palermo1963.

G. DE FIORE, M. DOCCI, C. JANNICCARI, A. PASCUCCI, Teoria della rappresentazione architettonica, Facoltà di Architettura, Roma, 1964.

L. CAMPEDELLI, Esercitazioni di geometria analitica e proiettiva, CE R. DE RUBERTIS, Nota sulle proiezioni assonometriche, Facolta di Architettura, Roma, 1967.

R. FILOSTO, Lineamenti teorici del disegno, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo, 1968.

V. CAPITANO, Applicazioni di Geometria Proiettiva e Descrittiva al disegno delle forme geometriche elementari, I.L.A. Palma, Palermo, Sao Paulo, 1972.

R. DE RUBERTIS, Geometria Descrittiva, Roma, 1975.

0. FASOLO, Lezioni di Geometria Descrittiva, Roma, 1975.

0. CHISINI, G. MASOTTI, Lezioni di geometria descrittiva, Tamburini Editrice, Milano, 1975.

M. INZERILLO, Lezioni di Applicazioni di Geometria Descrittiva, Co.Gra.S., Palermo, 1977.

M. INZERILLO, Lezioni di Teoria del Disegno Prospettico, Co.Gra.S., Palermo, 1977.

U. SACCARDI, Applicazioni di Geometria Descrittiva, Libreria Editrice Fiorentina, Firenze, 1977.

A. SGROSSO, A. VENTRE, Elementi di geometria proiettiva e di geometria descrittiva, Massimo, Napoli, 1979.

DAM, Padova, 1966.

L. BARBER!, C. FILIZZOLA, Proiezioni bicentrali associate: dalTassonometria ortogonale alla prospettiva lineare conica, Collana AGD-001, Facolta di Architettura, Palermo, 1982.

F. MAISANO, Lezioni di Geometria, Celup, Palermo, 1982.

C. CUNDARI, Teoria della rappresentazione dello spazio architettonico. Applicazioni di geometria descrittiva, Ed. Kappa, Roma, 1983.

G. M. CATALANO, Prospettiva sferica, Co.Gra.S., Palermo, 1986.

G. M. CATALANO, Assonometria delle quadriche, Co.Gra.S., Palermo,1986.

G. M. CATALANO, Prospettiva delle quadriche, Co.Gra.S., Palermo, 1987.

M. CAPOBIANCO, Elementi di prospettiva lineare conica, Ist. Edit. del Mezzogiorno, Napoli, (s.d.).

INDICE

PRESENTAZIONE ..... Pag. 5

INTRODUZIONE ..... Pag. 7

A - Costruzione omologica dell'ellisse noti un diametro e due punti ..... Pag. 9

B - Costruzione omologica dell'ellisse noti un diametro ed una corda non coniugata ..... Pag. 13

C - Costruzione della conica quando ne siano noti il centro, due punti e la retta tangente in uno di essi ..... Pag. 17

D - Costruzione della conica quando ne siano noti il centro (proprio o improprio), due punti e la retta tangente in uno di essi ..... Pag. 23

E - Costruzione della conica quando ne siano noti un diametro ed una corda coniugata ad esso ..... Pag. 29

F - Costruzione della conica quando ne siano noti un asse ed una corda ad esso coniugata Pag. 35

G - Costruzione della conica quando ne siano note due corde coniugate ..... Pag. 41

H - Costruzione della conica quando ne siano noti tre punti e le corrispondenti rette tangenti in due di essi ..... Pag. 49

1 - Costruzione della parabola quando ne siano noti due punti e le corrispondenti rette tangenti in essi la conica ..... Pag. 55

L - Costruzione della conica quando ne siano noti tre punti e le corrispondenti rette tangenti in due di essi ..... Pag. 61

BIBLIOGRAFIA Pag. 67